Convoluzione e teoremi di approssimazione

1. Convoluzione e teoremi di approssimazione in $H^1(\mathbb{R}^d)$

Sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ una funzione tale che:

$$\varphi \ge 0 \text{ su } \mathbb{R}^d; \qquad \text{il supporto di } \varphi \text{ è contenuto in } B_1; \qquad \int_{B_1} \varphi(x)\,dx = 1.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\phi({}^x\!/\!_\varepsilon).$$

Allora,

$$\phi_\varepsilon \ge 0 \text{ su } \mathbb{R}^d; \qquad \text{il supporto di } \phi_\varepsilon \text{ è contenuto in } B_\varepsilon; \qquad \int_{B_\varepsilon} \phi_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

Lemma 1. *Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Allora $u * \phi_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e*

$$\|u * \phi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Lemma 2. *Sia $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Allora $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ e*

$$\partial_j(u * \phi) = u * \partial_j \phi \quad \textit{per ogni} \quad j = 1, \dots, d.$$

Inoltre, abbiamo le disuguaglianze

$$\|u * \phi\|_{L^\infty} \le \|u\|_{L^2}\|\phi\|_{L^2} \qquad e \qquad \|\nabla(u * \phi)\|_{L^\infty} \le \|u\|_{L^2}\|\nabla\phi\|_{L^2}.$$

Lemma 3. *Siano $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e $\partial_j u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ la derivata distribuzionale di u per un qualche $j = 1, \dots, d$. Allora, per ogni $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big((\partial_j\, u) * \phi_\varepsilon\big)(x)\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \big(u * (\partial_j \phi_\varepsilon)\big)(x)\psi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \big(u * \phi_\varepsilon\big)(x)\partial_j\psi(x)\,dx$$

In particolare,

$$u * \phi_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d)\ , \quad \|u * \phi_\varepsilon\|_{H^1} \le \|u\|_{H^1}$$

e valgono le uguaglianze

$$(\partial_j\, u) * \psi_\varepsilon = u * \partial_j \psi_\varepsilon = \partial_j(u * \phi_\varepsilon).$$

Lemma 4. *Siano $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e $y \in \mathbb{R}^d$. Allora*

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x} \le |y|\,\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Usare il fatto che

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x} = \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}^d} \big(u(x+y) - u(x)\big)\psi(x)\,dx \ : \ \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d),\ \|\psi\|_{L^2} = 1\Big\}.$$

Lemma 5. *Sia $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Allora*

$$\|u * \phi_\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Teorema 6. *Le funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\mathbb{R}^d)$ sono dense in $H^1(\mathbb{R}^d)$.*

Proof.
(1) mostrare che $u * \phi_\varepsilon$ converge a u forte in L^2;
(2) mostrare che $u * \phi_\varepsilon$ converge a u debole H^1;
(3) mostrare che $u * \phi_\varepsilon$ converge a u forte H^1.

□

Lemma 7. *Siano $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Allora*

$$u\psi \in H^1(\mathbb{R}^d) \qquad e \qquad \nabla(u\psi) = \psi\nabla u + u\nabla\psi.$$

Lemma 8. *Sia $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ una funzione tale che*
- *il supporto di ψ è contenuto in B_1;*
- $0 \le \psi \le 1$;
- $\psi = 1$ *in* $B_{1/2}$.

Sia

$$\psi_R(x) = \psi(x/R).$$

Allora

$$\lim_{R\to\infty} \|u\psi_R - u\|_{H^1} = 0.$$

Teorema 9. *Le funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \cap H^1(\mathbb{R}^d)$ sono dense in $H^1(\mathbb{R}^d)$.*

Proof. Segue da Esercizio 8 e Teorema 6. □

2. Teoremi di approssimazione in $H^1(\Omega)$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto. Per ogni $\delta > 0$ definiamo

$$\Omega_\delta := \Big\{ x \in \Omega \ : \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \delta \Big\}.$$

Lemma 10. *Siano $u \in H^1(\Omega)$, $j \in \{1, \dots, d\}$, $\delta > 0$ e $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$. Allora, per ogni $\psi \in C_c^\infty(\Omega_\delta)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big((\partial_j\, u) * \phi_\varepsilon\big)(x)\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \big(u * (\partial_j \phi_\varepsilon)\big)(x)\psi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^d} \big(u * \phi_\varepsilon\big)(x)\partial_j\psi(x)\,dx$$

In particolare,

$$u * \phi_\varepsilon \in H^1(\Omega_\delta) \ , \quad \|u * \phi_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\delta)} \le \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

e valgono le uguaglianze

$$(\partial_j\, u) * \psi_\varepsilon = u * \partial_j \psi_\varepsilon = \partial_j(u * \phi_\varepsilon).$$

Lemma 11. *Siano $u \in H^1(\Omega)$, $\delta > 0$ e $y \in \mathbb{R}^d$ tale che $|y| \le \frac{\delta}{2}$. Allora*

$$\|u(x+y) - u(x)\|_{L^2_x(\Omega_\delta)} \le |y|\, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lemma 12. *Siano $u \in H^1(\Omega)$, $\delta > 0$ ed $\varepsilon < \frac{\delta}{4}$. Allora*

$$\|u * \phi_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega_\delta)} \le \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Teorema 13. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(\Omega)$. Allora, esiste una successione u_n di funzioni $C^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ tale che*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^1(\Omega_\delta)} = 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad \delta > 0.$$

Di conseguenza, abbiamo anche

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{H^1(D)} = 0 \qquad \textit{per ogni} \qquad D \Subset \Omega.$$